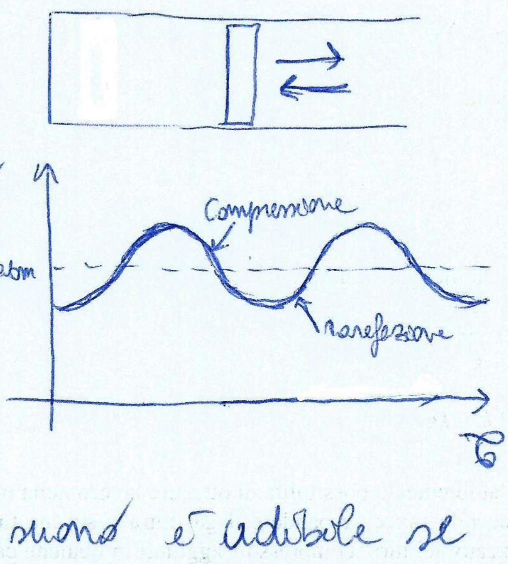
L'acustica e il suono

L'acustica contempla tutti i campi del suono, dalla musica al canto del cigno. Ci occuperemo delle grandezze fisiche e dei fenomeni (acustica fisica) tralasciando la parte applicativa (acustica applicata).

Un suono è tutto ciò che avvertiamo con le orecchie, un rumore è un suono che ci dà fastidio. A livello acustico non viene fatta questa distinzione di natura psicologica.

Se c'è assenza completa di rumore esterno (camera anecoica) percepiamo i rumori interni (battito del cuore, sangue che fluisce nelle nostre orecchie, respiro, ecc) e siamo in una condizione di malessere o fastidio.
D'altra parte vi sono ambienti rumorosi teoricamente, cioè se studiati acusticamente, ma non psicologicamente: molti considerano il rumore del mare o quello del vento riposanti. Esiste dunque la psicoacustica!
Il suono è un'onda, proprio come la luce. Lo possiamo verificare con uno stantuffo che sottopone l'aria a compressione e a rarefazione!



Si ha una variazione periodica della pressione. Il pistone comprime l'aria immediatamente prossima e la compressione si propaga lungo tutto il tubo. Se dopo 1 secondo dalla perturbazione iniziale la compressione ha percorso 344 metri si ha un suono.

Un suono è udibile se ha frequenza e ampiezza comprese tra:

$16\ Hz < f < 16000\ Hz$ $\qquad$ $20 \cdot 10^{-6}\ Pa < p < 20\ Pa$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_{max}}{\Delta P_{min}} = 10^{6}$$

Al di sotto di $20 \cdot 10^{-6}$ Pa (soglia udibilità) si hanno infrasuoni, al di sopra di 20 Pa (soglia del dolore) si hanno ultrasuoni. L'orecchio umano è molto sensibile: percepisce sei ordini di grandezza di pressione.

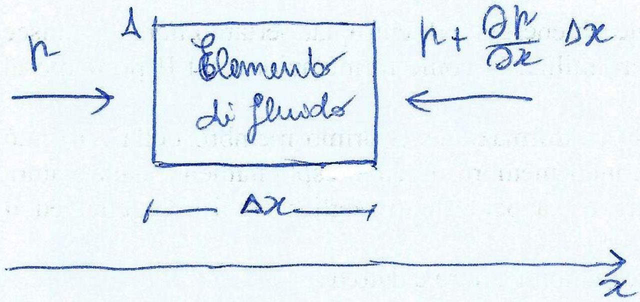
L'equazione di propagazione delle onde sonore

Ci servono tre elementi:

- il secondo principio della dinamica: $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$;
- la conservazione della massa;
- l'equazione della trasformazione adiabatica: $p \cdot v^{k} = cost$

La propagazione del suono è così veloce da non essere influenzata dal calore.

Consideriamo ora un volume di fluido $V_0 = A \cdot \Delta x$:



Faccia sinistra: $p_s = \Delta p(\tau) + p_0$

Faccia destra: $p_d = p_s + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x$

Per il II principio della dinamica:

$$pA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\cancel{A} = \cancel{A}\Delta x\, \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

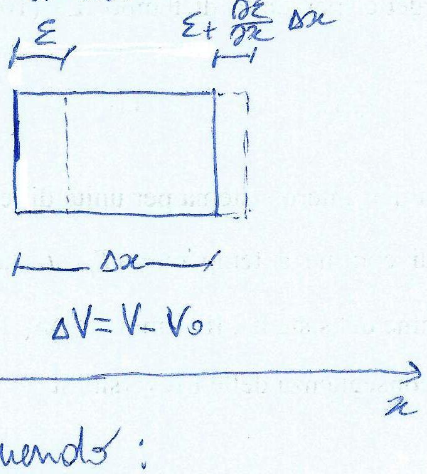
Quindi:

$$\cancel{p} - \cancel{p} - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x = \Delta x\, \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Ricordando che $p(x,\tau) = \Delta p(x,\tau) + p_0$, con $p_0 = cost$ si sostituisce p e si ottiene l'equazione di Eulero applicata al continuo:

$$-\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Sempre con lo stesso elemento di fluido passiamo allo studio della massa:



$\Delta V = V - V_0$

Massa d'aria:

$$m = cost = \rho_0 V_0 = \rho \cdot V \Rightarrow d(\rho V) = 0$$

$$\Rightarrow \rho dV + V d\rho = 0$$

Per variazioni piccole, ma finite:

$$\rho_0 \Delta V + V_0 \cdot \Delta \rho = 0$$

Quindi:

$$\Delta V = A\left(\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x\right) - A\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot V_0$$

Sostituendo:

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\cancel{V_0} + \cancel{V_0}\Delta \rho = 0 \Rightarrow -\Delta \rho = \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

Deriviamo rispetto al tempo:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) = -\frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial \tau}, \text{ se } u = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial \tau}$$

Abbiamo ottenuto la conservazione della massa.

u non è la velocità delle onde sonore, ma la velocità di spostamento delle particelle investite dalle onde.
Usiamo infine l'equazione dell'adiabatica considerando l'aria come gas perfetto:

$$p \cdot V^k = cost \Rightarrow -k\frac{dV}{V_0} = \frac{dp}{p_0}, \quad k = \frac{c_p}{c_v} > 1, \quad \frac{dV}{V_0} = -\frac{d\rho}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow k\frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{dp}{p_0}$$

Differenziamo a questo punto

$$\rho v = 1$$

$$v\,d\rho + \rho\,dv = 0 \Rightarrow v_0\,d\rho + \rho_0\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v_0} = -\frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{dV}{V_0} = -\frac{dp}{p_0}$$

Per variazioni finite:

$$k\frac{d(\Delta\rho)}{\rho_0} = \frac{d(\Delta p)}{p_0} \Rightarrow \frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} = k\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t}$$

Ma $-\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = \rho_0\frac{\partial u}{\partial x}$ per la conservazione della massa!

$$\cancel{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\cancel{\rho_0}}{k p_0}\cdot\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = -\frac{1}{k p_0}\,\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial t^2}$$

Deriviamo ancora $-\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} = \rho_0\frac{\partial u}{\partial t}$ (equazione di Eulero) rispetto a x:

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\cdot\partial t}$$

Uguagliamo i due risultati (cioè le due espressioni della derivata seconda mista):

$$\frac{1}{k p_0}\cdot\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial x^2}$$

Ponendo $\frac{k p_0}{\rho_0} = c^2$ si ottiene l'equazione di propagazione delle onde sonore monodimensionali o equazione di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial x^2}$$

Pur avendo usato l'adiabatica dei gas perfetti, tale equazione è valida pure per liquidi e solidi. Si introduce il modulo di elasticità E:

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} = \frac{E}{\rho_0}\cdot\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial t^2} = c^2\cdot\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial x^2} \quad \text{con } c^2 = \frac{E}{\rho_0}$$

Tornando ai gas, l'equazione di d'Alembert è un'equazione differenziale generale per un'onda monodimensionale (piana) che si propaga in un gas. Descrive il moto di perturbazione della pressione con velocità $c = \sqrt{\frac{k\,p_0}{\rho_0}}$ in direzione $+x$ o $-x$. Come al solito $k = \frac{c_p}{c_v}$.

La soluzione generale è:

$$\Delta p(x,\tau) = f_1\left(\tau + \frac{x}{c}\right) + f_2\left(\tau - \frac{x}{c}\right) \quad o \quad \Delta p(x,\tau) = f_1(x + c\tau) + f_2(x - c\tau)$$

Introduciamo la variabile ausiliaria $X = x \pm c\tau$:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \pm c \cdot \frac{df}{dX} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = c^2 \cdot \frac{d^2 f}{dX^2}$$

Tuttavia $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dX}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dX^2}$, quindi vale anche:

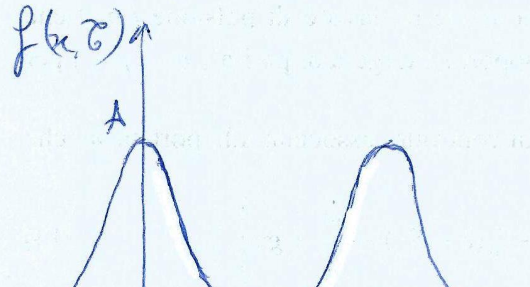
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Pertanto ogni funzione nella forma:

$$f(x,\tau) = f_1'(x - c\tau) \quad o \quad f(x,\tau) = f_2'(x + c\tau)$$

o qualsiasi combinazione delle due f_1' e f_2' è soluzione dell'equazione di D'Alembert nella forma appena trovata. Quindi i suoni assumono una varietà infinita di forme.

Ad esempio nel caso esponenziale:



$$f(x - c\tau) = A \cdot e^{-\frac{(x - c\tau)^2}{a^2}}$$

Con a (m) ampiezza. A è quella massima. Per $\tau = 0$:

$$f(x,0) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

Dopo un tempo τ la funzione trasla di $c\tau$.

Nel caso dell'aria c vale:

$T_0 = 293\ K \qquad p_0 = 101300\ Pa \qquad k = 1{,}4 \qquad R_a = 286\ \frac{J}{kg\,K}$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{k \cdot p_0}{\rho_0}} = \sqrt{k \cdot R_a \cdot T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 286 \cdot 293} = 344\ m/s$$

Per $p_0 = cost \Rightarrow c = f(T)$

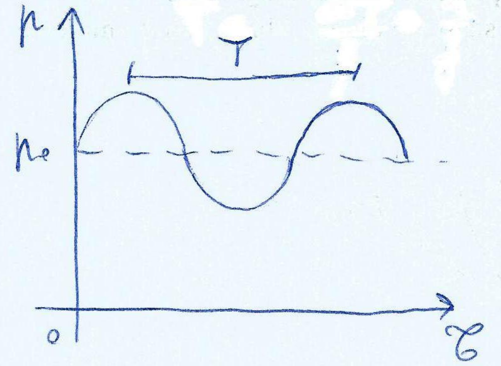
Grandezze fisiche dell'acustica

Anche l'acustica ha alcune grandezze fisiche particolari, tutte in comune con l'illuminotecnica:

- frequenza f: numero di volte per secondo in cui la pressione relativa Δp oscilla tra valori positivi e negativi:

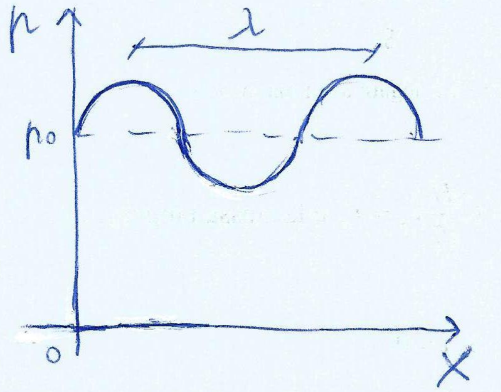
$$\left[\frac{ciclo}{s}\right] = [Hz]$$

- periodo T: reciproco della frequenza, tempo necessario a descrivere un ciclo completo:



$$T = 1/f \quad [s]$$

- lunghezza d'onda λ: distanza tra due punti analoghi su due onde successive:

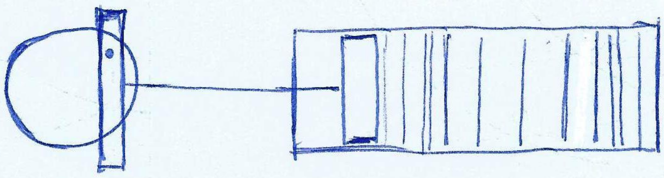


$$\lambda = c/f = c \cdot T \quad [m]$$

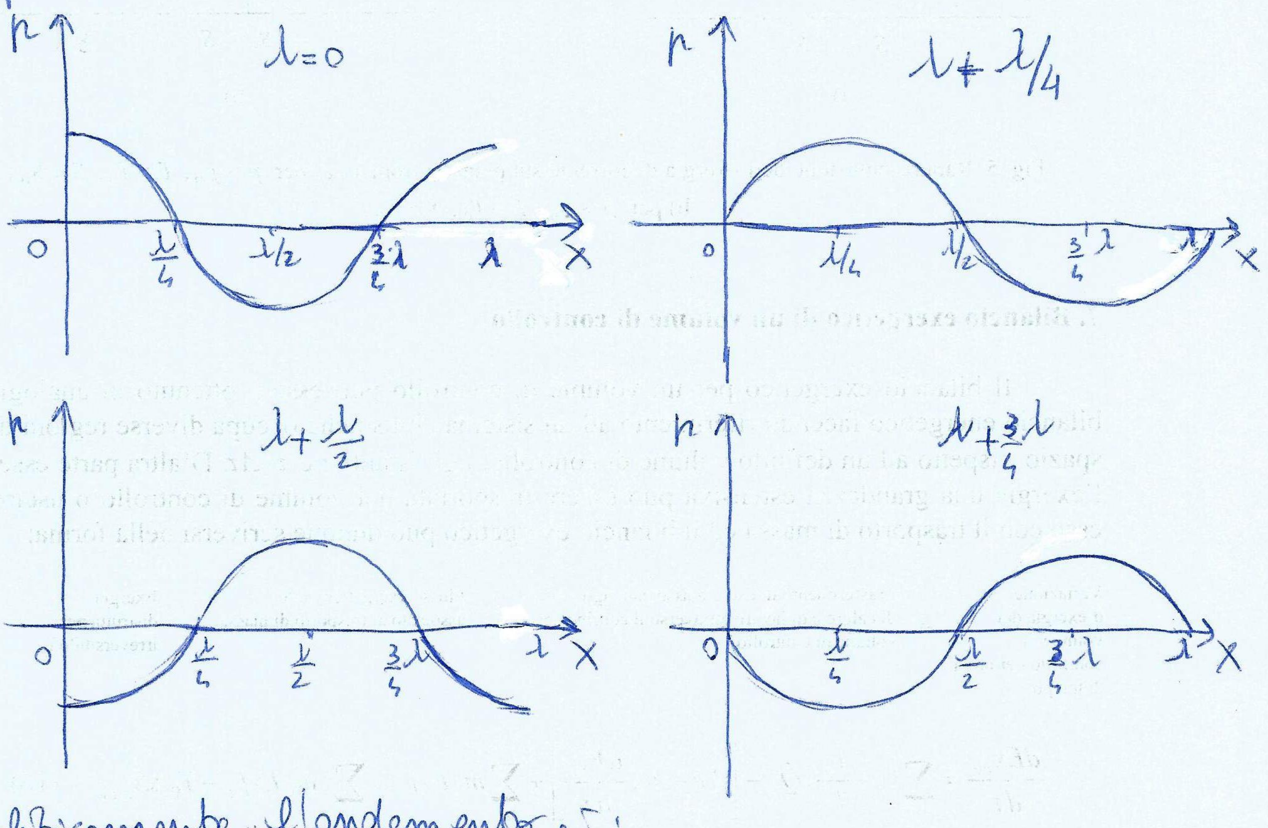
Si hanno frequenze basse (< 500 Hz, suoni cupi, come il rombo di un motore), frequenze medie (500 - 2000 Hz, come il normale parlato), frequenze alte (> 2000 Hz, come il vagito di un neonato, che è a 3000 Hz).

L'onda piana sinusoidale

Consideriamo un suono puro, cioè quello rappresentato da un'onda di tipo sinusoidale (si usa il coseno). Può essere generato da un sistema cilindro pistone in cui il pistone è vincolato a un disco rotante che impone ad esso un movimento periodico. Il disco deve essere circolare affinché generi variazioni sinusoidali periodiche delle grandezze fisiche caratteristiche:



Imponiamo a $\tau=0$ e $x=0$ il valore massimo:



Qualitativamente l'andamento è:

$$p(x,\tau) = p_{max}\cdot\cos\left[k(x-c\tau)\right] \qquad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

Per la periodicità del coseno e considerando la lunghezza d'onda λ:

$$\cos\left[k(x-c\tau)+2\pi\right] = \cos\left[k(x-c\tau+\lambda)\right]$$

$$\Rightarrow \cancel{k(x-c\tau)}+2\pi = \cancel{k(x-c\tau)}+k\lambda$$

$$\Rightarrow k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

Ma $\lambda = \frac{c}{f} = c \cdot T$:

$$k = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \qquad \left[rad/m\right]$$

Infatti la pulsazione è $2\pi f = \omega$. Sostituiamo k in:

$$k(x - c\tau) = \frac{2\pi}{\lambda}(x - c\tau) = \frac{2\pi f}{c}(x - c\tau) = 2\pi f\left(\frac{x}{c} - \tau\right) =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{c} - \tau\right) = 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{\tau}{T}\right) = kx - \omega\tau = \omega\left(\tau - \frac{x}{c}\right)$$

Infatti $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$. Si ottiene quindi:

$$p(x,\tau) = p_{max} \cos\left[\frac{\omega}{c}(x - c\tau)\right] = p_{max} \cos\left[\omega\left(\frac{x}{c} - \tau\right)\right]$$

Essendo $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ vale anche:

$$p(x,\tau) = p_{max} \cos\left[\omega\left(\tau - \frac{x}{c}\right)\right]$$

La pressione subisce una perturbazione. Ad essa corrisponde una variazione della velocità e uno spostamento di particelle. L'equazione di Eulero lega $p(x,\tau)$ a $u(x,\tau)$:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \Rightarrow u = u(x,\tau) = \frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x} \cdot d\tau = \frac{p_{max}}{\rho_0 c}\left[\cos \omega\left(\tau - \frac{x}{c}\right)\right]$$

Quindi pressione e velocità sono in fase. Facendone il rapporto si ottiene l'impedenza acustica specifica:

$$Z_s = \frac{p(x,\tau)}{u(x,\tau)} = \rho_0 c \qquad \left[\frac{N \cdot s}{m^3}\right]$$

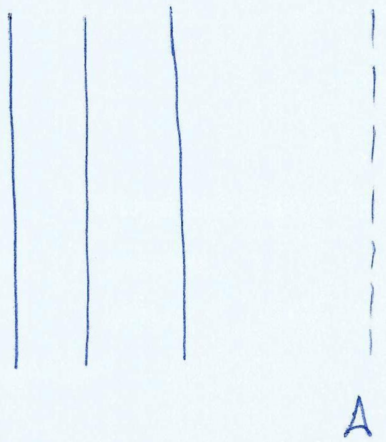
Con $\rho_0 c$ resistenza caratteristica del mezzo. In generale può comunque esserci sfasamento tra p e u.

L'intensità sonora

L'intensità sonora è un vettore che ha modulo:

$$I(\tau)=\frac{W(\tau)}{A}\qquad \left[W/m^2\right]$$

Con $W(\tau)$ potenza sonora. Ogni punto che emette suono genera fronti d'onda sferici. Possiamo immaginarli piani a grande distanza dalla fonte:



L'intensità sonora è la potenza sonora che attraversa A fratto A stessa. Vettorialmente:

$$\underline{I}(\tau)=\frac{W(\tau)\cdot \underline{u}(\tau)}{A\cdot u(\tau)}=\frac{F(\tau)}{A}\cdot\underline{u}(\tau)= p(\tau)\cdot \underline{u}(\tau)\qquad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Ha la stessa direzione e lo stesso verso della velocità di propagazione. Abbiamo parlato della grandezza istantanea, ma esiste pure l'intensità sonora media, il cui modulo è:

$$I_m=\frac{1}{T}\int_0^T p\cdot|u|\cdot d\tau$$

Nel caso di suoni puri $p=\rho_0 c u \Rightarrow u=\frac{p}{\rho_0 c}$, quindi:

$$I_m=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{p^2}{\rho_0 c}\,d\tau=\frac{1}{\rho_0 c T}\cdot\int_0^T p^2\, d\tau$$

Introducendo la pressione efficace $p_e=\sqrt{\frac{1}{T}\int p^2(\tau)\,d\tau}$:

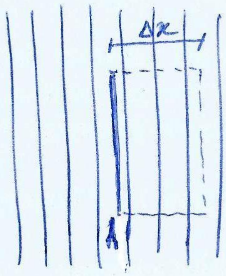
$$I_m=\frac{p_e^2}{\rho_0 c}$$

Si usa la pressione efficace al quadrato perché la media della pressione è nulla (per la conformazione sinusoidale). L'orecchio umano è sensibile all'intensità sonora. In base ad essa si distinguono i suoni, non in base alla pressione. Integrando $\{p_{max}\cos[\omega(\tau-\frac{x}{c})]\}^2$ tra 0 e T si ottiene $\frac{p^2_{max}}{2}=p_e^2$. Allora $I_m=\frac{p^2_{max}}{2\rho_0 c}$

Qualunque suono è una combinazione di onde piane, cioè di suoni puri.

La densità sonora

Definiamo densità sonora:



$$D = \frac{E}{V} = \frac{W(\tau)\cdot\Delta\tau}{A\,\Delta x} \quad [J/m^3]$$

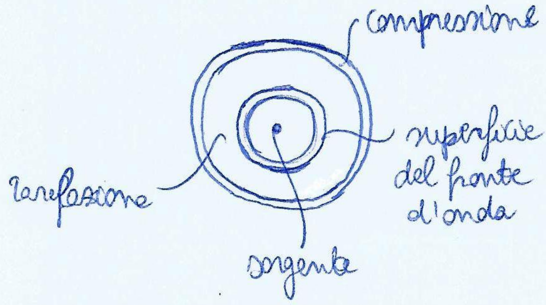
$$\Rightarrow D = \frac{W(\tau)\cdot\Delta\tau}{A\cdot\Delta\tau\cdot c} = \frac{I}{c}$$

Dato che $I = \frac{p_e^2}{\rho_0 c}$ si ottiene $D = \frac{p_e^2}{\rho_0\cdot c^2}$.

La densità sonora è utile nell'acustica delle case.

Onde sferiche

Nel caso di onde sferiche il problema diviene tridimensionale:



Essendo $p = p(x, y, z, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}$$

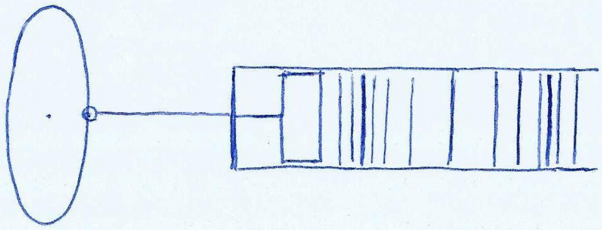
Intensità sonora di un'onda sferica:

$$I = \frac{dW}{dA} = \frac{W}{4\pi r^2}$$

Se la sorgente non fosse isotropa si dovrebbe introdurre il fattore di direttività: $Q = \frac{p_e^2}{p_{e\,is}^2}$. Il denominatore $p_{e\,is}^2$ è la pressione efficace provocata da una sorgente isotropa di uguale potenza.

Teorema di Fourier e scomposizione delle onde

Consideriamo un sistema cilindro-pistone. Il pistone è vincolato a una camma ellissoidale che genera una perturbazione di pressione periodica non sinusoidale. La camma può avere forma qualunque purché generi una perturbazione periodica.



Ricordiamo il teorema di Fourier:

$$p(\tau) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n' \cos\left(\frac{2\pi n \tau}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n'' \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n \tau}{T}\right)$$

In un periodo T devono esserci discontinuità, massimi e minimi in numero finito. L'integrale sul periodo T deve avere valore finito.
Nel teorema le pressioni sono date da:

$$p_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(\tau)\, d\tau \quad p_n' = \frac{2}{T}\int_0^T p(\tau)\cos(n\tau)\, d\tau \quad p_n'' = \frac{2}{T}\int_0^T p(\tau) \operatorname{sen}(n\tau)\, d\tau$$

Si può compattare:

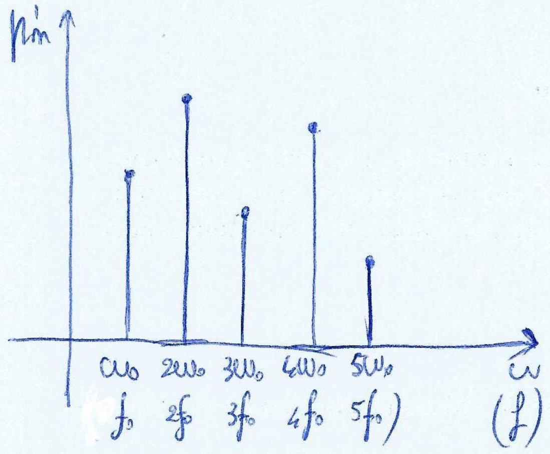
$$p(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(n\omega_0\tau + \delta_n)$$

Abbiamo introdotto la pulsazione ω e gli angoli di fase δ_n. ω_0 è la pulsazione fondamentale, $2\omega_0$, $3\omega_0$ sono le pulsazioni armoniche superiori. Dagli angoli di fase δ_n dipende la provenienza del suono. Tuttavia ciò non ci interessa: eliminiamo i δ_n. Un suono può essere definito anche limitando molto il numero di sviluppo della serie. La serie del teorema di Fourier permette infatti di scomporre qualsiasi onda con infiniti coseni. Interrompendo la scomposizione, cioè usando un numero finito di coseni, si raggiunge un risultato approssimato. Si sceglie un vettore delle pressioni:

$$(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)^T$$

Esso dà l'ampiezza delle armoniche usate per scomporre. Alla pulsazione fondamentale ω_0 corrisponde la frequenza fondamentale f_0 : $\omega_0 = 2\pi f_0$

Si compone quindi il grafico dello spettro sonoro:



$$p_{ei}^2 = \frac{p_i'^2}{2} \quad \text{ma} \quad p_{ei}^2 = \frac{p_{max}^2}{2}$$

Da p_i si passa dunque a p_{ei} e quindi a p_{ei}^2

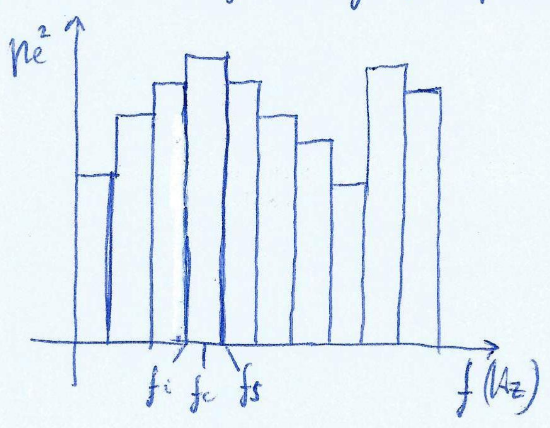
Da una funzione $p(\tau)$ si ottiene una serie finita di valori frequenza-ampiezza: lo spettro sonoro. Non si possono studiare i suoni nel tempo, su un diagramma $p-\tau$, ma bisogna passare a ω e f. Tuttavia la conoscenza delle p_i dipende da quella di $p(\tau)$, che non conosciamo a priori. Si usa allora uno strumento, l'analizzatore di spettro, che filtra il suono che cattura analizzandone solo alcune frequenze. Eleva al quadrato, fa la media e fornisce un'ampiezza.

A livello matematico si usa la trasformata di Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \, d\tau$$

Con $j = \sqrt{-1}$. Nessun suono tuttavia è costante e continuo da $-\infty$ a $+\infty$. Bisogna allora sfruttare la funzione periodica associata che ripete quel suono finito per infinite volte. Così si può applicare la trasformata di Fourier.

Si compone quindi uno spettro ocustico per bande, date tre frequenze: inferiore f_i, superiore f_s e centrale f_c:



Si usano bande d'ottava o anche di $\frac{1}{3}$ d'ottava. Ogni ottava è identificata dalla frequenza centrale, data da $f_c = \sqrt{f_i \cdot f_s}$. Le bande sono costruite in modo tale che la frequenza di centro di una banda sia il doppio di quelle centrale della banda precedente.

Il rapporto $\frac{\Delta f}{f_c}$ è costante ($f_s = 2 f_i$):

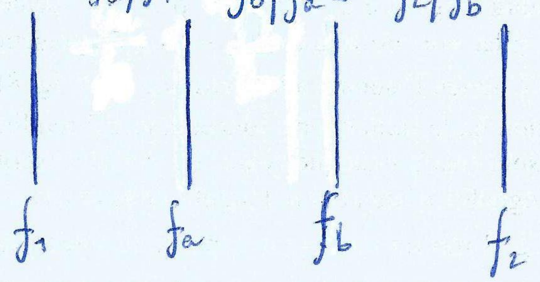
$$\frac{f_s - f_i}{f_c} = \frac{2 f_i - f_i}{\sqrt{2 f_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si usano poi le frequenze centrali di ottava normalizzate:

16 - 31,5 - 63 - 125 - 250 - 500 - 1000 - 2000 - 4000 - 8000 - 16000 Hz

Ogni banda d'ottava può poi essere divisa in tre parti:

$$f_a/f_1 = f_b/f_a = f_2/f_b$$



$$\begin{cases} \dfrac{f_a}{f_i} = \dfrac{f_b}{f_a} \Rightarrow f_i = \dfrac{f_a^2}{f_b} \\ \dfrac{f_s}{f_b} = \dfrac{f_b}{f_a} \Rightarrow f_s = \dfrac{f_b^2}{f_a} \\ f_s = 2 f_i \end{cases}$$

Sostituendo nella terza equazione:

$$\frac{f_b^2}{f_a} = 2 \frac{f_a^2}{f_b} \Leftrightarrow f_b^3 = 2 f_a^3 \Leftrightarrow f_b = \sqrt[3]{2}\, f_a$$

In generale, per la frazione n-esima di ottava vale:

$$f_a/f_b = 2^{1/n}$$

I decibel

L'orecchio umano è sensibile a sei ordini di grandezza in termini di pressione sonora e a dodici in termini di intensità sonora $I = \rho c p_e^2$. Come è possibile? Rinuncia alla linearità. Detta $\Delta S = k \frac{\Delta E}{E_0}$ la variazione di sensazione soggettiva, in cui ΔE è l'incremento di energia rispetto all'energia rispetto a quella iniziale E_0. Più quest'ultima è elevata meno l'orecchio è sensibile alle variazioni:

$$dS = k \frac{dE}{E_0} \Rightarrow S - S_0 = k \ln \frac{E}{E_0}$$

L'ultima equazione esprime la legge di Fechner.

Più utili operativamente sono però i livelli rispetto alle grandezze p_e, I, S. In generale sono definiti da:

$$L_G = 10 \log \frac{G}{G_0} \ [dB]$$

Con G_0 arbitrario.

Esistono vari livelli in relazione alla grandezza alla quale sono riferiti:

- rispetto alla pressione sonora efficace:
$$L_p = 10 \log \frac{p_e^2}{p_0^2} = 20 \log \frac{p_e}{p_0}, \quad p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \ Pa$$
- rispetto all'intensità sonora:
$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$
Nel caso di aria a 293 K e 101,3 kPa si ha $I = I_0$. In tal modo $L_p = L_I$;
- rispetto alla potenza sonora:
$$L_W = 10 \log \frac{W}{W_0}, \quad W_0 = 10^{-12} \ W$$

A differenza delle prime due, riferite al ricettore, la potenza sonora si riferisce alla sorgente.

Se $\rho_0 = 1{,}17 \ kg/m^3$, $T = 20°C$ e $c = 344 \ m/s$ (per l'aria) si ha:

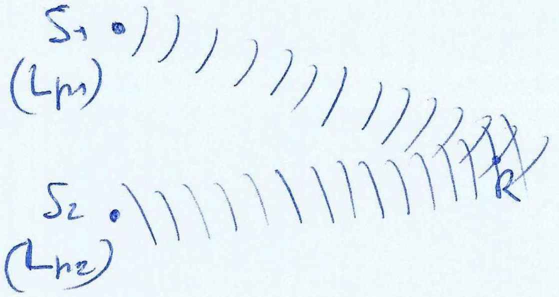
$$I = \frac{p_0^2}{\rho_0 c} = 1{,}006 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

Per questo $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$.

Sotto i 20 dB si ha silenzio quasi totale, sopra gli 80 il rumore inizia a essere fastidioso.

La direttività

Consideriamo due sorgenti e un ricettore:



$$L_{p1} = 10 \log\left(\frac{p_{e1}^2}{p_0^2}\right), \quad L_{p2} = 10 \log\left(\frac{p_{e2}^2}{p_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p_{e1}^2}{p_0^2} = 10^{L_{p1}/10}, \quad \frac{p_{e2}^2}{p_0^2} = 10^{L_{p2}/10}$$

$$\Rightarrow L_{pTOT} = 10 \log \frac{p_{e1}^2 + p_{e2}^2}{p_0^2} =$$

$$= 10 \log\left(\frac{p_{e1}^2}{p_0^2} + \frac{p_{e2}^2}{p_0^2}\right) =$$

$$= 10 \log\left(10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p2}/10}\right)$$

Vale la sovrapposizione degli effetti di tipo logaritmico.
Per N sorgenti:

$$L_{pTOT} = 10 \log\left(\frac{p_{e1}^2 + p_{e2}^2 + \dots + p_{ei}^2 + \dots + p_{eN}^2}{p_0^2}\right) = 10 \log\left(\sum_{i=1}^{N} 10^{L_{pi}/10}\right)$$

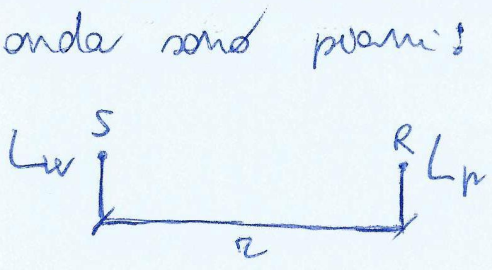
Se si hanno due sorgenti identiche ($L_{p1} = L_{p2}$):

$$L_{pTOT} = 10 \log\left(10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p1}/10}\right) = 10 \log\left(2 \cdot 10^{L_{p1}/10}\right) =$$

$$= 10 \log 2 + 10 \log\left(10^{L_{p1}/10}\right) = L_{p1} + 3\,dB$$

Il raddoppio o il dimezzamento delle sorgenti causa una variazione di tre soli decibel. Si sa che la sensazione psicologica di dimezzamento del rumore si ha abbassando il livello di dieci decibel. Bisogna allora ridurre di 12,5 volte le sorgenti.

Immaginiamo ora di avere una sorgente senza ostacoli, come un aereo in volo. A grande distanza i fronti d'onda sono piani:



$$I = \frac{W}{4\pi r^2} \qquad L_p = 10 \log \frac{p_e^2}{p_0^2}$$

Con $p_e^2 = I \rho_0 c$:

$$L_p = 10 \log \frac{\rho_0 c I}{p_0^2}$$

Usando $\rho_0 = 1{,}17\ kg/m^3$, $c = 344\ m/s$, $I_0 = 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$:

$$\rho_0 c \cdot I_0 = (2\cdot 10^{-5})^2\ Pa^2 = p_0^2 \Rightarrow \frac{\rho_0 c}{p_0^2} = \frac{1}{I_0}$$

Quindi:

$$L_p = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\left(\frac{W}{4\pi r^2}\cdot\frac{1\,m^2}{I_0}\cdot\frac{1}{1\,m^2}\right)$$

In tale espressione di L_p si ha $I_0 \cdot 1\,m^2 = W_0$ (caso isotropo):

$$L_p = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\left(\frac{W}{W_0}\cdot\frac{1\,m^2}{4\pi r^2}\right) = 10\log\left(\frac{W}{W_0}\right) + 10\log\left(\frac{1\,m^2}{4\pi r^2}\right) =$$

$$= 10\log\left(\frac{W}{W_0}\right) \underbrace{\cancel{+10\log(1\,m^2)}}_{=0} - 10\log(4\pi) - 10\log(r^2) =$$

$$= L_W - 10\log(r^2) - 11\ dB = L_W - 20\log r - 11\ dB$$

Usando il fattore di direttività $Q = \frac{p_e^2}{p_{e\,is}^2}$:

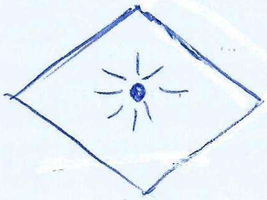
$$L_p = 10\log\frac{p_e^2}{p_0^2} = 10\log\frac{Q\,p_{e\,is}^2}{p_0^2} = 10\log\frac{p_{e\,is}^2}{p_0^2} + 10\log Q =$$

$$= L_{W_{is}} - 20\log r + 10\log Q - 11\ dB$$

Abbiamo usato l'espressione di L_p trovata prima per la sorgente isotropa, caratterizzata da $L_{p\,is} = 10\log\frac{p_{e\,is}^2}{p_0^2} = L_{W\,is} + -20\log r - 11\ dB$. Se $Q > 1$ L_p cresce, altrimenti decresce.

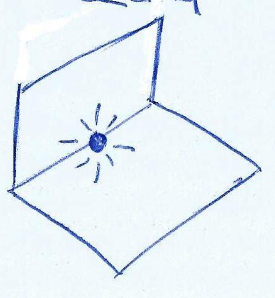
Se abbiamo una sorgente puntiforme con le superfici riflettenti disegnate di seguito (perfetta riflessione):

$Q = 2$



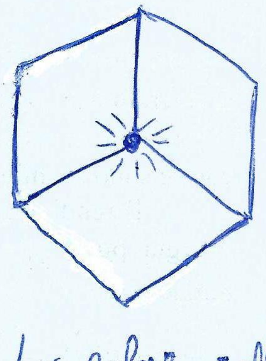
$L_p = L_W - 20\log r - 8\ dB$

$Q = 4$



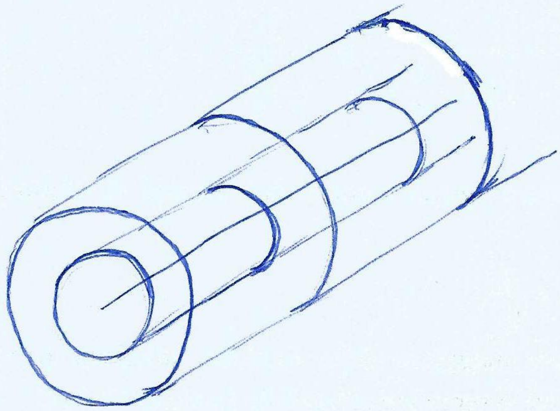
$L_p = L_W - 20\log r - 5\ dB$

$Q = 8$



$L_p = L_W - 20\log r - 2\ dB$

Con sorgente lineare (strade, ferrovie, ecc) si definisce la potenza sonora per unità di lunghezza W_e:



$$I = \frac{W_e}{2\pi r}$$

$$L_{W_e} = 10\log\frac{W_e}{W_{e0}}$$

$$L_p = 10\log\frac{p_e^2}{p_0^2} = 10\log\frac{I\cdot\rho_0\cdot c}{p_0^2} =$$

$$= 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{W_e}{2\pi r}\cdot\frac{1m}{I_0}\cdot\frac{1}{1m} =$$

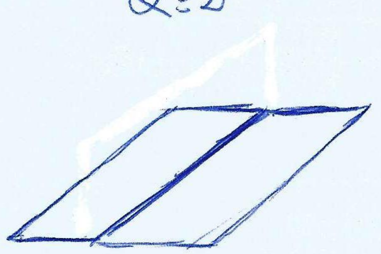
$$= 10\log\left(\frac{W_e}{W_{e0}}\cdot\frac{1}{2\pi r}\cdot 1m\right)$$

$$\Rightarrow L_p = 10\log\frac{W_e}{W_{e0}} + 10\log\frac{1}{2\pi r} + \underbrace{\cancel{10\log(1m)}}_{=0}$$

$$\Rightarrow L_p = L_{W_e} - 10\log 2\pi r = L_{W_e} - 10\log r - 10\log 2\pi = L_{W_e} - 10\log r - 8\,dB$$

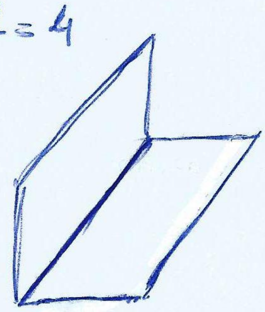
Due casi particolari:

$Q = 2$



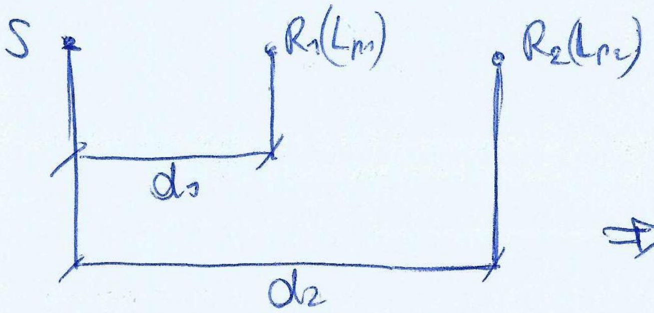
$$L_p = L_{W_e} - 10\log r - 5\,dB$$

$Q = 4$



$$L_p = L_{W_e} - 10\log r - 2\,dB$$

Nel caso di allontanamento della sorgente puntiforme:



$$L_{p1} = L_W - 20\log d_1 - 11\,dB + 10\log Q$$

$$L_{p2} = L_W - 20\log d_2 - 11\,dB + 10\log Q$$

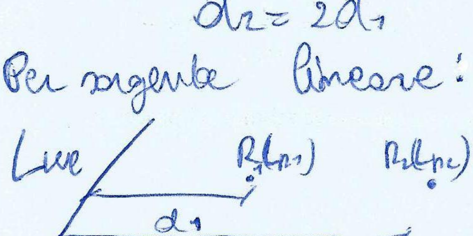
$$\Rightarrow L_{p1} - L_{p2} = -20\log d_1 + 20\log d_2 =$$

$$= -20\log\frac{d_1}{d_2} = -20\log\frac{1}{2} = 6\,dB$$

$d_2 = 2d_1$

Ogni raddoppio causa un aumento di 6 dB.

Per sorgente lineare:



$$L_{p1} = L_{W_e} - 10\log d_1 - 8\,dB + 10\log Q$$

$$L_{p2} = L_{W_e} - 10\log d_2 + 8\,dB + 10\log Q$$

$$\Rightarrow L_{p1} - L_{p2} = -10\log d_1 + 10\log d_2 = 10\log\frac{d_2}{d_1}$$

Vediamo tre esercizi:

- calcoliamo la variazione di livello di p sonora e di W sonora dovute rispettivamente al raddoppio di p sonora e di W sonora:

  a) $p_{e2} = 2p_{e1}$

  $$L_{p1} = 10 \log \frac{p_{e1}^2}{p_{e0}^2} = 20 \log \frac{p_{e1}}{p_{e0}} \qquad L_{p2} = 20 \log \frac{2p_{e1}}{p_0} = 20 \log 2 + 20 \log \frac{p_{e1}}{p_e} = L_{p1} + 6\,dB$$

  Il livello di p sonora si alza di 6 dB

  b) $W_2 = 2W_1$

  $$L_{W1} = 10 \log \frac{W_1}{W_0} \qquad L_{W2} = 10 \log \frac{W_2}{W_0} = 10 \log \frac{2W_1}{W_0} = 10 \log \frac{W_1}{W_0} + 10 \log 2 = L_{W1} + 3\,dB$$

  Il livello di potenza sonora si alza di 3 dB.

- un'unità di condizionamento dell'aria opera a 73 dB in un ambiente il cui livello di intensità acustica è 68 dB. Il livello risultante è:

  $L_{I1} = 68\,dB \quad L_{I2} = 73\,dB$

  $$\Rightarrow L_{I\,TOT} = 10 \log \sum_{i=1}^{N} 10^{L_{Ii}/10} = 10 \log \left(10^{6,8} + 10^{7,3}\right) = 74,2\,dB$$

- una sorgente a 74 dB opera contemporaneamente a un'altra a 70 dB. Calcolare il livello di pressione sonora totale. Ripetere l'esercizio assumendo che il livello di p sonora della seconda sia 74 dB, 73 dB, 72 dB, 68 dB e 64 dB:

  $$L_{P\,TOT} = 10 \log \left(10^{7,4} + 10^{7,0}\right) = 75,5\,dB$$

  $$L'_{P\,TOT} = 10 \log \left(2 \cdot 10^{7,4}\right) = 77,0\,dB$$

  $$L''_{P\,TOT} = 10 \log \left(10^{7,4} + 10^{7,3}\right) = 76,5\,dB$$

  $$L'''_{P\,TOT} = 10 \log \left(10^{7,4} + 10^{7,2}\right) = 76,1\,dB$$

  $$L^{IV}_{P\,TOT} = 10 \log \left(10^{7,4} + 10^{6,8}\right) = 75,0\,dB$$

  $$L^{V}_{P\,TOT} = 10 \log \left(10^{7,4} + 10^{6,4}\right) = 74,4\,dB$$

Spesso si assume, approssimando, che il risultato sia il livello più alto dei due di partenza.